فرایند تصادفی
احتمال و توزیع ها

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

استنتاج آماری

کمک در تصمیم بر آنچه بدان اعتقاد یابیم

جستجو بر یافتن تحقیق

مدل

- توصیف ریاضی

مدل آماری

- معمولا مدل احتمالی

مدل دارای پارامتر است

مثال

- احتمال باران وابسته به مثلا سطح دریا
  - باران خروجی
  - سطح دریا: ورودی

رابطۀ دقیق بین ورودی و خروجی با مقدار دیگری تدوین می‌شود که نمایشگر این است که ورودی چقدر بر خروجی تأثیر می‌گذارد

- پارامتر

تدوین مدل (معادله‌بندی مدل): نمایشگر اینکه ورودی بر خروجی تأثیرگذار است.

- پارامترها مقدار دقیق تاثیر را معین می‌کنند

مدل دارای پارامتر است

مثال

- شیر آمدن سکه
  - سکهٔ کج
  - اختلاف بین دو سطح x
  - $P(ش|x)$
- درجهٔ اعتماد
- هایپرپارامتر

سخن کوتاه

مدل ریاضی احتمالِ پیشامدهای خاصی که رخ می‌دهند.

مدل ریاضی دارای پارامترهائی است.

مقدار پارامترها مشخص‌کنندهٔ احتمال دقیق بدست‌آمده از مدل‌هاست

اعتقادات به مقدار پارامترها جریان می‌دهد.

شاید بعضی از مقادیر را نسبت به مقادیر دیگر بیشتر مستعد درستی بدانیم

صورت اعتقاد ما دربارهٔ مقدار پارامترها خود می‌تواند با مدل ریاضی دیگری بیان شود [هایپر]-پارامترها

اهداف استنتاج

تخمین مقدار پارامتر

پیش‌بینی مقدار داده

- کمک مدل‌ها به پیش‌بینی اثربخشی واکسن انفلوانزا هنگام واکسن عمومی
- کمک مدل‌ها به پیش‌بینی مسیر طوفان
- کمک مدل‌ها به پیش‌بینی شیر یا خط آمدن پرتاب بعدی سکه
- در استنتاج بیز، میانگین وزنی اعتقاد است.

مقایسه مدل (انتخاب مدل)

احتمال

روش‌های آماری مطالعۀ دقیقِ عدم‌قطعیت‌ها

نیاز به فهم احتمال

مجموعه متناهی پیشامدهای ممکن

- پرتاب سکه؟
  - چقدر محتمل است؟
  - خط چقدر محتمل است؟
  - هر دو آمدن چقدر محتمل است؟
- محتمل بودن هر برآمد، مجموعه‌ای از برآمدها را در ذهن داریم
- هر دو آمدن جز پیشامدهای ممکن نیست

پیشامد

هنگام پرسش دربارۀ محتمل شدن پیشامدی مجموعه‌ای از پیشامدها را در ذهن داریم، شامل تمامی پیشامدهای ممکن و پیشامدهای دو به دو مستقل از یکدیگر

- فضای نمونه

احتمال

مطالعه عدم‌قطعیت‌ها

نسبتی از زمان اتفاق افتادن پیشامد

درجه اعتقاد درباره پیشامد

عدم‌قطعیت در

- داده
- مدل یادگیر
- پیش‌بینی‌های حاصل از مدل

مفاهیم فضای احتمال

- فضای نمونه
- پیشامدها
- احتمال هر رخداد

احتمال

شیر آمدن

- احتمال شیر آمدن پارامتر θ
- سکهٔ سالم $\theta = 0.5$
- درجهٔ اعتقاد $\mathrm{P}(\theta)$
  - $\mathrm{P}(\theta = 0.5) = 0.99$
- احتمال:
  - شیر و خط
  - فضای نمونه دارند
- درجهٔ اعتقاد
  - مقدار پیوسته ۱.۰۰و ... و۰.۰۱.۰۲و۰ = θ

چرا سکه

- چقدر سکه پرتاب می‌کنیم؟
- مشابه زندگی- احتمال زنده ماندن یکسال پس از جراحی
- احتمال اثرجانبی سردرد ناشی از دارو
- انتخابات یا رفراندوم

احتمال

- نیاز به متغیر تصادفی جهت کمی‌سازی عدم قطعیت
  - تابع واسط بین خروجی آزمایش تصادفی به مجموعه‌ای از ویژگی‌های مورد توجه
- توزیع احتمال
  - مرتبط با متغیر تصادفی
  - تابع اندازه‌گیرندهٔ احتمال خروجی خاص
  - جزو اساسی
    - مدل‌های احتمالاتی
    - مدل‌های گرافیکی
    - انتخاب مدل

ایجاد فضای احتمال

هدف نظریه احتمال

- تعریف ساختی ریاضی برای توضیح خروجی‌های تصادفی آزمایش‌ها
- مثال
  - پرتاب سکه
    - عدم امکان تشخیص خروجی
    - با انجام بسیاری آزمایش، مشاهده نظم در میانگین خروجی
  - پرتاب تاس
- استدلال خودکار
- تعمیم استدلال منطقی

روش‌های ترکیبیاتی

اعمال چند مرحله‌ای

- دومرحله‌ای
- بیش از دو مرحله

جایگشت

- **n** شی متمایز
- چینش **r** شی از **n** شی متمایز
- **n** شی متمایز روی دایره
- **n** شی دارای **k** دستهٔ متمایز

ترکیب (آرایش) (زیرمجموعه)

- انتخاب **r** شی از **n** شی متمایز
- تعداد افرازهای **n** شی متمایز به **r** زیرمجموعه

ضرائب دوجمله‌ای

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$$

$$\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{m+n}{k}$$

معادلهٔ استرلینگ

$$n! \cong \sqrt{۲\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

عدد اویلر

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=?$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=?$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{حـــد}}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n}=?$$

تفسیرهای احتمال

کلاسیک (احتمال برابر)

بسامدی

بیزی

اصل آغازه

فضای نمونه Ω

آزمایش

- هر فرایند مشاهده یا اندازه‌گیری

برآمد

- نتایج حاصل از آزمایش

فضای نمونه

- مجموعهء همه برآمدهای ممکن آزمایش
  - فضای نمونه پرتاب سکه، اعداد صحیح فرد و مثبت، فضای نمونه‌ای که از پرتاب جفت تاس، یکی سرخ و دیگری سبز
- گسسته (متناهی و یا نامتناهی شمارا) در مقابل پیوسته (نقاط فضای نمونه تشکیل پیوستار)

پیشامد

- زیرمجموعه‌هائی از فضای نمونه
- نادرستی عکس مطلب

فضای پیشامد

- معمولا مجموعه توانی Ω

مثال

طول عمر مفید وسیلهٔ الکترونیکی

- فضای نمونه

وسیلهٔ الکترونیکی قبل از ششمین سال از کار بیفتد

- پیشامد

$$\Omega = \{\mathrm{t} : \mathrm{t} \geq 0\}$$
$$F = \{t : 0 \leq t \leq 6\}$$

تابع احتمال و اصول کولمولگروف

تابعی را که به هر پیشامد، عددی در بازه ۰ تا ۱ نسبت دهد و صادق در سه اصل زیر

نمایش احتمال پیشامدA با $P(A)$

- $P(A)$

- اصل اول: احتمال هر پیشامد نامنفی $P(A) \geq 0$
- اصل دوم: احتمال جمع پیشامدهای مجزا (ناسازگار) برابر با جمع احتمال‌های تک‌تک آن‌ها
- اصل سوم:احتمال فضای نمونه برابر با ۱

مثال- پرتاب تاس- فضای نمونه، پیشامد اعداد زوج؛ پیشامد اعداد کوچکتر از ۵

مثال

احتمال پیشامد وقوع عدد بزرگتر از ۳ برای تاسی که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است

ویژگی‌ها

A' متمم پیشامد A

$$p(A') = 1 - P(A)$$

ϕ مجموعه تهی

$$p(\phi) = 0$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B \cup C)$$
$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

ویژگی‌ها

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$$

$$P(A \cap B) \leq \min(P(A), P(B))$$
$$p(\phi) = 0$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال شرطی

احتمال شرطی پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

به سخن دیگر، احتمال شرطی احتمال پیشامد A است بعد از مشاهدهء پیشامد B

$$p(A \cap B) = p(B)p(A|B) = p(A)p(B|A)$$

احتمال شرطی

نمودار ون

مثال

	عرضهٔ خدمات مناسب	عرضهٔ خدمات بد
سابقه شغلی کمتر از ۱۰ سال	۱۶	۴
سابقه شغلی بیشتر از ۱۰ سال	۱۰	۲۰

خ: احتمال مرکز مناسب چقدر است؟

$$P(\text{خ}) = \frac{۲۶}{۵۰} = ۰.۵۲$$

ک: در صورت انتخاب مرکز با کمتر از ۱۰ سال سابقه، احتمال مناسب بودن خدمات چقدر است؟

$$p\left(\text{خ}\middle|\text{ک}\right) = \frac{p\left(\text{خ} \cap \text{ک}\right)}{p\left(\text{ک}\right)} = \frac{\frac{۱۶}{۵۰}}{\frac{۲۰}{۵۰}} = \frac{۱۶}{۲۰} = ۰.۸$$

قاعدهٔ زنجیری

پیشامدهای $S_1, \dots, S_k$ و $P(S_i) > 0$

برای $k = ۲$

$$P(S_۱ \cap S_۲) = P(S_۱)P(S_۲|S_۱)$$

در واقع قاعدهء زنجیری مشتق از اعمال چندبارهء احتمال شرطی است.

برای $k = ۳$

$$P(S_۱ \cap S_۲ \cap S_۳) = P(S_۱)P(S_۲|S_۱)P(S_۳|S_۱ \cap S_۲)$$

برای k

$$P(S_۱ \cap S_۲ \cap \cdots \cap S_k) = P(S_۱)P(S_۲|S_۱)P(S_۳|S_۱ \cap S_۲) \dots P(S_k|S_۱ \cap S_۲ \cap \cdots \cap S_{k-۱})$$

مثال

اگر از ۲۴۰ لامپ تلویزیونی، ۱۵ لامپ معیوب باشد، دو لامپ را بدون جایگذاری به ترتیب برداریم.

احتمال اینکه هر دو معیوب باشد چقدر است؟

خ: احتمال معیوب بودن اولین لامپ

ک: احتمال معیوب بودن دومین لامپ

$$p\left(\text{ک} \cap \text{خ}\right) = p\left(\text{خ}\right) p\left(\text{ک}\middle|\text{خ}\right) = \frac{۱۵}{۲۴۰}\frac{۱۴}{۲۳۹}$$

مثال

۲۰ فیوز در بسته داریم که ۵ مورد آنها معیوب است.

خ: احتمال معیوب بودن اولین لامپ

ک: احتمال معیوب بودن دومین لامپ

ل: احتمال معیوب بودن سومین لامپ

احتمال اینکه هر سه معیوب باشد چقدر است؟

$$p\left(\text{خ} \cap \text{ک} \cap \text{ل}\right) = p\left(\text{خ}\right) p\left(\text{ک} \middle| \text{خ}\right) p\left(\text{ل} \middle| \text{خ} \cap \text{ک}\right) = \frac{۵}{۲۰}\frac{۴}{۱۹}\frac{۳}{۱۸}$$

استقلال

دو پیشامد مستقل خوانده می‌شوند اگر

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

یا

$$p(A|B) = p(A)$$

شهود دو پیشامد مستقل

- عدم‌تأثیر مشاهدهٔ B بر مشاهدهٔ A

مثال

۲۰ فیوز در بسته داریم که ۵ مورد انها معیوب است.

خ: احتمال معیوب بودن اولین لامپ

ک: احتمال معیوب بودن دومین لامپ

ل: احتمال معیوب بودن سومین لامپ

اگر فیوز را برگردانیم. احتمال اینکه هر سه معیوب باشد چقدر است؟

$$p\left(\text{خ}\right)=\frac{۵}{۲۰}$$

$$p\left(\text{ک}\middle|\text{خ}\right)=\frac{۵}{۲۰}$$

$$p\left(\text{ل}\middle|\text{خ}\cap\text{ک}\right)=\frac{۵}{۲۰}$$

$$p\left(\text{خ}\cap\text{ک}\cap\text{ل}\right)=p\left(\text{خ}\right)p\left(\text{ک}\middle|\text{خ}\right)p\left(\text{ل}\middle|\text{خ}\cap\text{ک}\right)=(\frac{۵}{۲۰})^{۳}$$

مثال

سکه‌ای را سه بار پرتاب کنیم. خ: ۱ ش: 0، $\Omega = \{000,001,010,\ldots,111\}$

پیشامد شیر در دو پرتاب اول α، $p(\alpha) = \frac{۱}{۴}$

پیشامد خط در پرتاب سوم β، $p(\beta) = \frac{۱}{۲}$

پیشامد دقیقا دو خط در سه پرتاب γ، $p(\gamma) = \frac{۳}{۸}$

پیشامدهای α و β مستقل‌اند؟ $p(\alpha\beta) = \frac{۱}{۸} = p(\alpha)p(\beta)$

پیشامدهای γ و β مستقل‌اند؟ $p(\gamma \cap \beta) = \frac{۱}{۴}, p(\gamma)p(\beta) = \frac{۳}{۱۶}$

قضيةُ بيز

مثال

ساخت بزرگراهی به علت عدم اعتبار ممکن است به تاخیر بیفتد. احتمال فراهم نشدن اعتبار ۰,۶ است. احتمال انجام سروقت بزرگراه به شرط وجود اعتبار ۰,۸۵ و احتمال ان به شرط عدم اعتبار ۰,۳۵ است.

$$p(\beta) = ۰.۶$$

$$p(\alpha|\beta) = ۰.۳۵$$

$$p(\alpha|\beta') = ۰.۸۵$$

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= p\big((\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \beta')\big) \\ &= p(\alpha \cap \beta) + p(\alpha \cap \beta') \\ &= p(\beta)p(\alpha|\beta) + p(\beta')p(\alpha|\beta') \\ &= ۰.۶ \times ۰.۳۵ + ۰.۴ \times ۰.۸۵ = ۰.۵۵ \end{aligned}$$

قاعدهٔ احتمال کل (قاعدهٔ حذف)

پیشامدهای β_1، β_2، ...، β_k افرازی از فضای نمونهٔ Ω و $p(\beta_i) \neq 0$

$$p(\alpha) = \sum_{i=1}^{k} p(\beta_i) p(\alpha|\beta_i)$$

مثال

در استان زنجان دودزائی اتومبیل‌ها بیش از حد استاندارد است. اتومبیل دودزا در آزمون با احتمال ۰,۹۹ مردود و اتومبیل سالم در آزمون با احتمال ۰,۱۷ مردود می‌شود. احتمال اینکه اتومبیل در آزمون رد شود واقعا دودزا باشد چقدر است؟

اتومبیل دودزا $p(\beta) = ۰.۲۵$

اتومبیل سالم $p(\beta') = ۰.۷۵$

رد شدن α

$$p(\alpha|\beta) = ۰.۹۹$$

$$p(\alpha|\beta') = ۰.۱۷$$

$$p(\beta \cap \alpha) = p(\alpha)p(\beta|\alpha) = p(\beta)p(\alpha|\beta) \Longrightarrow p(\beta|\alpha) = \frac{p(\beta)p(\alpha|\beta)}{p(\alpha)}$$

$$p(\beta|\alpha) = \frac{p(\beta)p(\alpha|\beta)}{p(\beta)p(\alpha|\beta)+p(\beta')p(\alpha|\beta')}$$

قاعدهٔ بیز

$$p(\beta|\alpha) = \frac{p(\beta)p(\alpha|\beta)}{p(\beta)p(\alpha|\beta) + p(\beta')p(\alpha|\beta')}$$

تعمیم

پیشامدهای β_1، β_2، ...، β_k افرازی از فضای نمونهٔ Ω و $p(\beta_i) \neq 0$

$$p(\beta_i|\alpha) = \frac{p(\beta_i)p(\alpha|\beta_i)}{\sum_{j=1}^{k} p(\beta_j)p(\alpha|\beta_j)}$$

متغیر تصادفی

توجه به جنبه‌ای خاص

- فرض ریختن جفت تاس و صرفا توجه به مجموعه رقم‌ها
  - (1,1)
  - (2,1)
  - …

عدم استفاده مستقیم از فضای احتمال در مسائل عموما و خاصه هوش مصنوعی

فضای هدف

$$X\colon \Omega \rightarrow \mathcal{T}$$

- متغیر تصادفی
- غلط مصطلح و سوتفاهم
  - نه تصادفی نه متغیر
  - بلکه تابع

متغیرهای تصادفی RANDOM VARIABLES مت

مثال- پرتاب ۱۰ سکه و به دنبال اینکه تعداد شیرهایی که از این تعداد پرتاب به دست می‌آید.

- اعضای فضای نمونه دنباله‌های ده‌تائی از شیر و خط هستند

در عمل به دنبال این «**نیستیم**» که احتمال دنباله‌ای خاص چقدر است.

- به دنبال توابع مقدار-حقیقی از خروجی‌ها هستیم.
- مثلا مجموع دو عددی که در ریختن جفت تاس، یا تعداد شیرهائی که در ۱۰ پرتاب تاس به دست می‌آید

مت:

$$X: \Omega \to \mathbb{R}$$

نمایش با X(ω) یا X

$X = x$ یعنی مقدار $x \in R$ را به مت X اختصاص داده‌ایم

مثال

سکه‌ای چهار با پرتاب می‌شود. مت تعداد کل شیرها

خ: ۱ ش: 0، $\Omega = \{0000,0001,0010,\ldots,1111\}$

$$P(X = ۳) = \frac{۴}{۱۶}$$

فضای نمونه	احتمال	X=x
0000	$\frac{۱}{۱۶}$	۴
0001	$\frac{۱}{۱۶}$	۳
0010	$\frac{۱}{۱۶}$	۳
0011	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
0100	$\frac{۱}{۱۶}$	۳
0101	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
0110	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
0111	$\frac{۱}{۱۶}$	۱
1000	$\frac{۱}{۱۶}$	۳
1001	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
1010	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
1011	$\frac{۱}{۱۶}$	۱
1100	$\frac{۱}{۱۶}$	۲
1101	$\frac{۱}{۱۶}$	۱
1111	$\frac{۱}{۱۶}$	0

متغیرهای تصادفی - ادامه

اگر Ω فضای نمونه با اندازه احتمال باشد و X تابع حقیقی-مقدار روی اعضای فضای نمونه باشد

مثال متغیر تصادفی گسسته: تعداد شیر در پرتاب ۱۰ سکه

- مقادیر محدودی را می‌پذیرد

$$P(X = k) = P(\{\omega : X(\omega) = k\})$$

متغیر تصادفی پیوسته: زمانی نیمه عمر ماده رادیواکتیو؛ طول عمر مفید وسیلهء الکترونیکی

- مقداری نامتناهی را می‌پذیرد
- b و a به طوری که $a < b$

$$P(a \leq X \leq b) = P(\{\omega : a \leq X(\omega) \leq b\})$$

مثال- توزیع احتمال

فضای نمونهٔ پرتاب جفت تاس هر عضو فضا $\frac{۱}{۳۶}$

متغیر تصادفی حاصل‌جمع دو عدد تاس‌ها

تدوین معادله

$$P(X=x)=\frac{۶-|x-۷|}{۳۶}, x=۲,۳,\ldots,۱۲$$

x	$P(X=x)$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	$\frac{۲}{۳۶}$
۴	$\frac{۳}{۳۶}$
۵	$\frac{۴}{۳۶}$
۶	$\frac{۵}{۳۶}$
۷	$\frac{۶}{۳۶}$
۸	$\frac{۵}{۳۶}$
۹	$\frac{۴}{۳۶}$
۱۰	$\frac{۳}{۳۶}$
۱۱	$\frac{۲}{۳۶}$
۱۲	$\frac{۱}{۳۶}$

توزیع‌های احتمال

فهرستی از تمامی خروجی‌های ممکن و احتمال‌های متناظر هر یک

- توزیع احتمال پرتاب سکه-
  - دو خروجی شیر و خط
  - احتمال‌های متناظر آنها θ و $1-\theta$
- توزیع احتمال مقدار کالری مصرفی روزانهٔ انسان
  - ۲۰۰۰.۰
  - ۱۸۹۸.۳
  - ۲۴۴۷.۹
  - ...
- توزیع‌های گسسته
  - فضای نمونه حاوی خروجی گسسته و احتمال مجزای هر برآمد
    - پرتاب سکه، ریختن تاس
    - تقسیم فضای پیوسته
- توزیع‌های پیوسته
  - احتمال نقطه‌ای صفر
  - احتمال بازه‌ای ممکن
  - چگالی احتمال

توزیع‌های احتمال

بر اساس اصول کولمولگروف

قضیه: توابعی را می‌توان به مثابهٔ توزیع احتمالیِ متغیر تصادفی گسسته به کار برد که مقادیر $f(x)$ اگر و فقط اگر مشمول شرایط زیر باشند

$$f(x) \geq 0$$

$$\sum_{x} f(x) = 1$$

مثال- نمودار میله‌ای

تدوین معادله برای توزیع احتمال تعداد کل شیرهای چهار پرتاب سکه

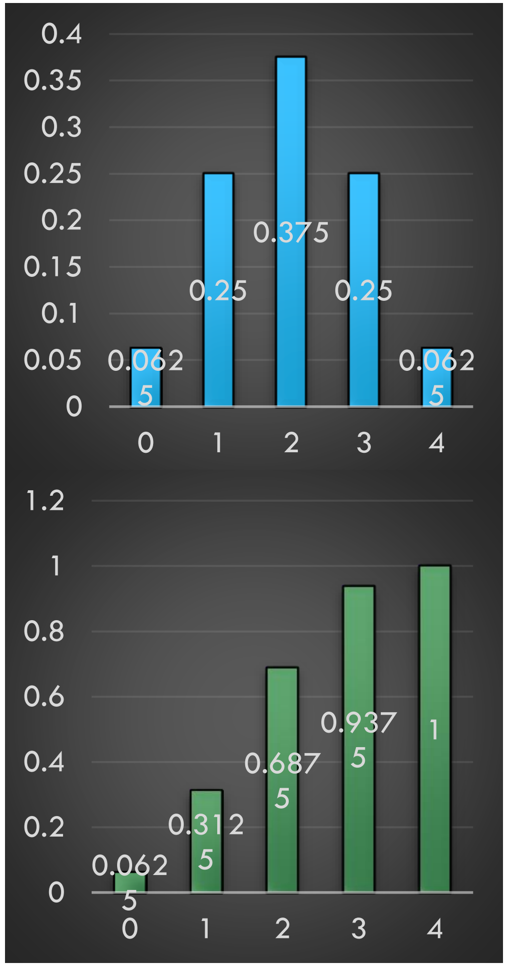
$$P(X=0)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$P(X=۱)=\frac{۴}{۱۶}$$

$$P(X=۲)=\frac{۶}{۱۶}$$

$$P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$$

$$P(X=۴)=\frac{۱}{۱۶}$$



مثال

$$P(x) \geq 0$$
$$\sum_{x} P(x) = 1$$

بررسی کنید تابع زیر تابع توزیع است.

$$f(x) = \frac{x + ۲}{۲۵}, x = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

$$f(x) \geq 0$$
$$\sum_{x} f(x) = 1$$

توابع توزیع تجمیعی-

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t), \qquad -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$F(+\infty) = ۱$$

مثال

x	$f(X=x)$
۲	$\frac{۱}{۳۶}$
۳	$\frac{۲}{۳۶}$
۴	$\frac{۳}{۳۶}$
۵	$\frac{۴}{۳۶}$
۶	$\frac{۵}{۳۶}$
۷	$\frac{۶}{۳۶}$
۸	$\frac{۵}{۳۶}$
۹	$\frac{۴}{۳۶}$
۱۰	$\frac{۳}{۳۶}$
۱۱	$\frac{۲}{۳۶}$
۱۲	$\frac{۱}{۳۶}$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<۲ \\ \frac{۱}{۳۶}, & ۲\le x<۳ \\ \frac{۳}{۳۶}, & ۳\le x<۴ \\ \frac{۶}{۳۶}, & ۴\le x<۵ \\ & \vdots \\ \frac{۳۵}{۳۶}, & ۱۱\le x<۱۲ \\ ۱, & x\ge ۱۲ \end{cases}$$

توزیع احتمال این تابع تجمیعی چقدر است؟

$$P(۲)=\frac{۱}{۳۶}$$

$$P(۳)=\frac{۳}{۳۶}-\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲}{۳۶}$$

$$P(۴)=\frac{۶}{۳۶}-\frac{۳}{۳۶}=\frac{۳}{۳۶}$$

$$\vdots$$

$$P(۱۲)=۱-\frac{۳۵}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}$$

توابع توزیع تجمیعی - ادامه

ویژگی‌ها

$$0 \leq F(X) \leq ۱$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(X) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(X) = ۱$$

$$x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$$

توابع توزیع تجمیعی - ادامه

قضیه: اگر متغیر تصادفی متشکل از مقادیر $x_n > \cdots > x_۲ > x_۱$ باشد، آن‌گاه $F(x_۱) = \mathrm{P}(x_۱)$، و

$$P(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}) \ , i = ۲, ۳, \ldots, n$$

مثال

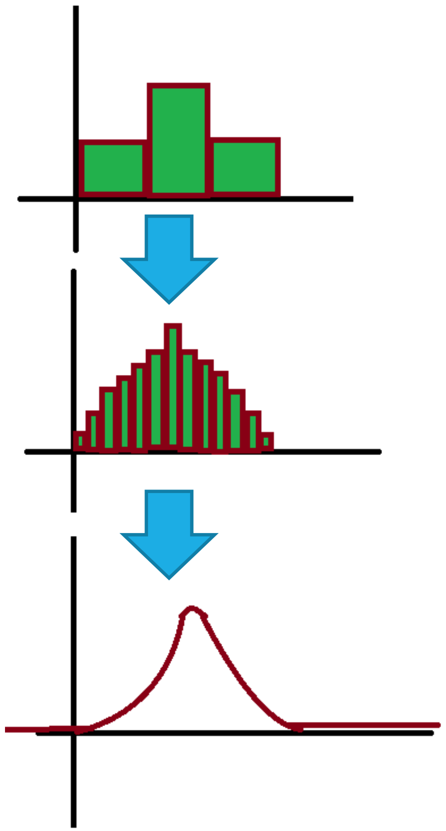
تعداد کل شیرهای چهار پرتاب سکه

$$P(X=0)=\frac{۱}{۱۶}$$
$$P(X=۱)=\frac{۴}{۱۶}$$
$$P(X=۲)=\frac{۶}{۱۶}$$
$$P(X=۳)=\frac{۴}{۱۶}$$
$$P(X=۴)=\frac{۱}{۱۶}$$

$$F(0)=P(0)=\frac{۱}{۱۶}$$
$$F(۱)=P(0)+P(۱)=\frac{۵}{۱۶}$$
$$F(۲)=P(0)+P(۱)+P(۲)=\frac{۱۱}{۱۶}$$
$$F(۳)=P(0)+P(۱)+P(۲)+P(۳)=\frac{۱۵}{۱۶}$$
$$F(۴)=P(0)+P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=۱$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{۱}{۱۶}, & 0\le x<۱ \\ \frac{۵}{۱۶}, & ۱\le x<۲ \\ \frac{۱۱}{۱۶}, & ۲\le x<۳ \\ \frac{۱۵}{۱۶}, & ۳\le x<۴ \\ ۱, & x\ge ۴ \end{cases}$$

تابع چگالی احتمال PROBABILITY DENSITY FUNCTION «تچا» یا «PDF»



در حالت گسسته: $P(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

اگر مت پیوسته باشد، ت۳ در همه‌جا مشتق‌پذیر است

«تچا» مشتق «ت۳» است (شبیه تفاضل در حالت گسسته)

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P(x \le X \le x + \delta x) = f_X(x)\delta x$$

توجه: مقدار تچا مربوط به یک نقطه، احتمال آن نقطه نیست

$$f_X(x) \ne P(X = x)$$

تابع چگالی احتمال – ویژگی‌ها

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = ۱$$

$$\int_{x \in A} f_X(x)dx = P(X \in A)$$

مثال

$f(x) = \begin{cases} ke^{-۳x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ در چه صورتی چگالی احتمال است؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = ۱$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ke^{-۳x}dx = \int_{0}^{+\infty} ke^{-۳x}dx = \lim_{t\to\infty} \frac{ke^{-۳x}}{-۳}\Big|_0^t = \frac{k}{۳} = ۱ \Longrightarrow k = ۳$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$$

- تابع توزیع تجمیعی

تابع چگالی احتمال –

قضیه: اگر f(x) و F(x) توابع توزیع احتمال و تابع توزیع X به ازای x باشند، آن‌گاه به ازای هر دو عدد حقیقی a و b و با شرط $a \leq b$:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

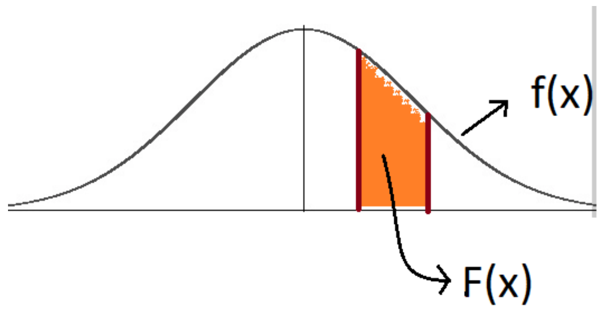
و این مشتق موجود است

مثال

$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$ تابع چگالی احتمال را بدست آورید و رسم کنید.

مثال

فرض کنید ۱۰۰۰ باتری را امتحان کردیم و نمودار آن‌ها شبیه زیر است



احتمال برابر سطح زیر منحنی در حد فاصل مقدار کم و بیش بازه

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx$$

تابع توزیع احتمال

گسسته

- تفاضل
- تابع جرم احتمال

$$P(x) \geq 0$$

$$\sum_{x} P(x) = 1$$

- $0 \leq P(x) \leq 1$
  - چرا؟

پیوسته

- مشتق
- تابع چگالی احتمال

$$f_X(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

- $f_X(x) \leq 1$؟
  - خیر

دو متغیر تصادفی

JOINT AND MARGINAL DISTRIBUTIONS توزیع‌های توام و حاشیه‌ای

تاکنون صرفا یک متغیر تصادفی

ممکن است که بیش از یک متغیر تصادفی درگیر باشد

- مثال

X و Y دو متغیر تصادفی و $F_X(x)$ و $F_Y(y)$ توزیع متناظر آن‌ها

نیاز به توزیعی قوی‌تری برای فهم کار آن‌ها با یکدیگر

- تابع توزیع جرمی توام X و Y

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

توزیع‌های توام - مثال

دو قرص به تصادف از بسته‌ای محتوای سه قرص آسپرین و ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص سرماخوردگی انتخاب می‌کنیم.

X تعداد قرص آسپرین، Y تعداد قرص خواب‌آور

X	Y
0	0
0	۱
۱	0
۱	۱
0	۲
۲	0

$$P(X=1,Y=0)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{0}\binom{۴}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۳}$$

$$P(X=1,Y=1)=\frac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۴}{0}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

$$P(X=x,Y=y)=\frac{\binom{۳}{x}\binom{۲}{y}\binom{۴}{۲-x-y}}{\binom{۹}{۲}}, x,y\in\{0,۱,۲\}, 0\le x+y\le ۲$$

	$X=0$	$X=۱$	$X=۲$
$Y=0$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$
$Y=۱$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$	
$Y=۲$	$\frac{۱}{۳۶}$		

ویژگی‌ها

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\sum_{x}\sum_{y} f(x,y) = 1$$

مثال $f(x,y) = kxy, \quad x,y = $ ۱و۲و۳

توزیع تجمیعی توام X و Y

$$F(x,y) = P(X \le x, Y \le y) = \sum_{s \le x} \sum_{t \le y} f(s,t)$$

توزیع‌های توام - مثال

دو قرص به تصادف از بسته‌ای محتوای سه قرص آسپرین و ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص سرماخوردگی انتخاب می‌کنیم.

X تعداد قرص آسپرین، Y تعداد قرص خواب‌آور

$F(1,1)$؟

X	Y
0	0
0	۱
۱	0
۱	۱
0	۲
۲	0

	$X=0$	$X=۱$	$X=۲$
$Y=0$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$
$Y=۱$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$	
$Y=۲$	$\frac{۱}{۳۶}$		

حالت پیوسته

$f(x,y)$ تابع چگالی احتمال توام اگر و فقط اگر

$$P[(X,Y) \in A] = \int_A \int f(x,y)dxdy$$

ویژگی‌ها

$$f(x,y) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = ۱$$

تابع توزیع توام

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(s,t)dsdt$$

چگالی توام:

$$f(x,y) = \frac{\partial^{2}}{\partial x \partial y} F(x,y)$$

مثال

چگالی توام X و Y

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, 0<x<1, 0<y<1 \\ 0 \quad \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$F(x,y)=\begin{cases} 0 & ,x\le 0 \text{ یا } y\le 0 \\ \frac{1}{2}xy(x+y), & 0<x<1,0<y<1 \\ \frac{1}{2}y(1+y), & x\ge 1,0<y<1 \\ \frac{1}{2}x(x+1), & 0<x<1,y\ge 1 \\ 1, & x\ge 1,y\ge 1 \end{cases}$$

توزیع‌های حاشیه‌ای- مثال

X	Y
0	0
0	۱
۱	0
۱	۱
0	۲
۲	0

دو قرص به تصادف از بسته‌ای محتوای سه قرص آسپرین و ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص سرماخوردگی انتخاب می‌کنیم.

X تعداد قرص آسپرین، Y تعداد قرص خواب‌آور

توزیع احتمال X و توزیع احتمال Y

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	
$Y=0$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
$Y=1$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$		$\frac{۷}{۱۸}$
$Y=2$	$\frac{۱}{۳۶}$			$\frac{۱}{۳۶}$
	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	

توزیع‌های حاشیه‌ای-گسسته

X و Y دو متغیر تصادفی گسسته

f(x,y) توزیع احتمال توام آنها

- توزیع حاشیه‌ای X=x

$$f_X(x) = \sum_y f_{XY}(x,y)$$

- توزیع حاشیه‌ای Y=y

$$f_Y(y) = \sum_x f_{XY}(x,y)$$

توزیع‌های حاشیه‌ای-پیوسته

X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته

f(x,y) چگالی احتمال توام آنها

- چگالی حاشیه‌ای X=x

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

- چگالی حاشیه‌ای Y=y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx$$

چگالی حاشیه‌ای– مثال

چگالی توام

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{۲}{۳}(x+۲y), 0<x<۱, 0<y<۱\\ 0, \quad \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

چگالی‌های حاشیه‌ای X و Y

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^1 \frac{۲}{۳}(x+۲y)dy=\frac{۲}{۳}(x+۱)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{۲}{۳}(x+۲y)dx=\frac{۱}{۳}(۱+۴y)$$

توزیع‌های توام و حاشیه‌ای – تابع چگالی

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy\,dx = 1$$

چگالی احتمال حاشیه‌ای X

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy$$

$$\sum_{x,y} f_{XY}(x,y) = \sum_x \sum_y f_{XY}(x,y)$$

$$\mathrm{F}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \sum_{s \leq x} \sum_{t \leq y} \underbrace{f_{XY}(s,t)}_{\text{جرم}}$$

$$\mathrm{F}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f_{XY}(s,t)}_{\text{چگالی}} \, ds \, dt$$

چند متغیری گسسته

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = P(X_۱ = x_۱, X_۲ = x_۲, \dots, X_n = x_n)$$

$$F(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = P(X_۱ \leq x_۱, X_۲ \leq x_۲, \dots, X_n \leq x_n)$$

مثال

$$f(x,y,z) = \frac{(x+y)z}{۶۳}, x = ۱,۲; y = ۱,۲,۳; z = ۱,۲$$

$P(X = ۲, Y + Z \leq ۳)$؟

$$P(X = ۲, Y + Z \leq ۳) = f(۲,۱,۱) + f(۲,۱,۲) + f(۲,۲,۱)$$
$$= \frac{۳}{۶۳} + \frac{۶}{۶۳} + \frac{۴}{۶۳} = \frac{۱۳}{۶۳}$$

چند متغیری پیوسته

احتمال با استفاده از چگالی توام

$$F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \ldots \int_{-\infty}^{x_۲} \int_{-\infty}^{x_۱} f(t_۱, t_۲, \ldots, t_n) dt_۱ dt_۲ \ldots dt_n$$

$$f(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_۱ \partial x_۲ \ldots \partial x_n} F(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$$

توزیع‌های شرطی

با دانستن احتمال X در مقدار x، توزیع احتمال Y چقدر است؟

- گسسته – تابع جرم

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)}$$

- پیوسته- تابع چگالی

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

توزیع‌های شرطی- مثال

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	
$Y=0$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
$Y=1$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$		$\frac{۷}{۱۸}$
$Y=2$	$\frac{۱}{۳۶}$			$\frac{۱}{۳۶}$
	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	

دو قرص به تصادف از بسته‌ای محتوای سه قرص آسپرین و ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص سرماخوردگی انتخاب می‌کنیم.

X تعداد قرص آسپرین، Y تعداد قرص خواب‌آور

$$P(X=0|Y=۱)=\frac{\frac{۲}{۹}}{\frac{۷}{۱۸}}=\frac{۴}{۷}$$

$$P(X=۱|Y=۱)=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۷}{۱۸}}=\frac{۳}{۷}$$

$$P(X=۲|Y=۱)=\frac{0}{\frac{۷}{۱۸}}=0$$

مثال

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{۲}{۳}(x+۲y), 0<x<۱, 0<y<۱\\ 0, & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^1 \frac{۲}{۳}(x+۲y)dy=\frac{۲}{۳}(x+۱)$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^1 \frac{۲}{۳}(x+۲y)dx=\frac{۱}{۳}(۱+۴y)$$

چگالی شرطی X با داشتن $Y=y$: $P\left(x\le \frac{۱}{۲}|y=\frac{۱}{۲}\right)$

$$f(x|y)=\frac{f(x,y)}{f(y)}=\frac{\frac{۲}{۳}(x+۲y)}{\frac{۱}{۳}(۱+۴y)}=\begin{cases}\frac{(۲x+۴y)}{(۱+۴y)}, 0<x<۱\\ 0, & \text{درغیراینصورت}\end{cases}$$

$$f\left(x|y=\frac{۱}{۲}\right)=\frac{(۲x+۴y)}{(۱+۴y)}=\frac{\left(۲x+۴\times\frac{۱}{۲}\right)}{\left(۱+۴\times\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{۲x+۲}{۳}$$

$$P\left(x\le\frac{۱}{۲}|y=\frac{۱}{۲}\right)=\int_0^{\frac{۱}{۲}}\frac{۲x+۲}{۳}dx=\frac{۵}{۱۲}$$

توزیع شرطی چند متغیری

دارای انواع متفاوت

اهمیت استقلال

توزیع‌های توام و حاشیه‌ای - استقلال

مت‌های X و Y مستقلند اگر $F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$

- گسسته: برای تمامی

$$p_{XY}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$$
$$p_{Y|X}(y|x) = p_Y(y)$$

- پیوسته: برای تمام اعداد حقیقی x,y

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$
$$f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y)$$

توزیع‌های توام و حاشیه‌ای - استقلال

لم- اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه هر زیرمجموعهٔ A و B از اعداد حقیقی خواهیم داشت:

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

یا

$$P(X \leq a, Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b)$$

همچنین

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$$

نشان می‌دهد که هر تابعی از X، از هر تابعی از Y مستقل خواهد بود.

اثبات-

توزیع‌های بیز

با دانستن احتمال X در مقدار x، توزیع احتمال Y چقدر است؟

- گسسته – تابع جرم

$$P_{Y|X}(y|x) = \frac{P_{XY}(x,y)}{P_X(x)} = \frac{P_{X|Y}(x|y)P_Y(y)}{\sum_{y'} P_{X|Y}(x|y')P_Y(y')}$$

- پیوسته- تابع چگالی

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x|y')f_Y(y')dy'}$$

قاعدهٔ زنجیری

متغیرهای $X_1, \dots, X_k$

$$P_{X_1,\dots,X_k}(x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_k)$$

$$= P_{X_1}(x_1) P_{X_2|X_1}(x_2|x_1) \dots P_{X_k|X_1,\dots,X_{k-1}}(x_k|x_1 \cap x_2 \cap \cdots \cap x_{k-1})$$

امید ریاضی

در ارتباط با بازی‌های شانسی

- صورت معمول آن معادل مبلغی حاصل از بازی بازیکن

گسسته

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x} x P_X(x)$$

پیوسته

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

مثال

۱۲ تلویزیون شامل ۲ تلویزیون معیوب

انتظار دستگاه معیوب با انتخاب ۳ دستگاه

$$f(x) = \frac{\binom{۲}{x}\binom{۱۰}{۳-x}}{\binom{۱۲}{۳}}, \qquad x = 0, ۱, ۲$$

x	0	۱	۲
$f(x)$	$\frac{۶}{۱۱}$	$\frac{۹}{۲۲}$	$\frac{۱}{۲۲}$

$$E(X) = 0.\frac{۶}{۱۱} + ۱.\frac{۹}{۲۲} + ۲.\frac{۱}{۲۲}$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} \frac{۴}{\pi(۱ + x^۲)}, 0 < x < ۱ \\ 0 \quad \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^۱ x \frac{۴}{\pi(۱ + x^۲)} = \frac{۴}{\pi} \int_0^۱ \frac{x}{۱ + x^۲}$$

امید ریاضی

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

گسسته

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x} g(x) P_X(x)$$

پیوسته

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

حالت خاص: $g(X) = X$

مثال

X عدد ریختن تاس

$g(X) = ۲X^۲ + ۱$

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x=۱}^{۶} (۲x^۲ + ۱).\frac{۱}{۶}$$

$$= (۲ \times ۱^۲ + ۱).\frac{۱}{۶} + \cdots + (۲ \times ۶^۲ + ۱).\frac{۱}{۶} = \frac{۹۴}{۳}$$

امید ریاضی – ویژگی‌ها

$a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[a] = a$$
$$\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$$
$$\mathbb{E}[af(X)] = a\mathbb{E}[f(X)]$$

خطی بودن

$$\mathbb{E}[f(X) + g(X)] = \mathbb{E}[f(X)] + \mathbb{E}[g(X)]$$

$$\mathbb{E}[a_۱X_۱ + a_۲X_۲ + \cdots + a_nX_n] = a_۱\mathbb{E}[X_۱] + a_۲\mathbb{E}[X_۲] + \cdots + a_n\mathbb{E}[X_n]$$

متغیر تصادفی گسستهٔ X

$$\mathbb{E}\,[1\{X = k\}] = P(X = k)$$

مثال-

احتمال جمع امید ریاضی حاصل از ریختن سه تاس

- $X = X_۱ + X_۲ + X_۳$

$$E[X] = E[X_۱] + E[X_۲] + E[X_۳] = ۳\left(\frac{۷}{۲}\right) = \frac{۲۱}{۲}$$

مثال-

امید ریاضی مت دوجمله‌ای با پارامترهای **n** و **p**

- $X = X_۱ + X_۲ + \cdots + X_n$

$$X_i = \begin{cases} ۱ \\ 0 \end{cases}$$

متغیر تصادفی برابر ۱ در صورت پیروزی آزمایش i-ام در غیر این‌صورت برابر 0

- X_i مت برنولی
  - پس $\mathrm{E}[X_i] = ۱p + 0(۱ - p) = p$

$$E[X] = E[X_۱] + E[X_۲] + \cdots + E[X_n] = np$$

وردائی یا واریانس

سنجش پراکندگی

چگونگی تمرکز مت X حول میانگین

$$Var[X] = E\left[(X - E[X])^{۲}\right] \\ = E\left[X^{۲}\right] - E[X]^{۲}$$

وردائی یا واریانس – ویژگی‌ها

$$Var[a] = 0$$

$$Var[af(X)] = a^{۲}Var[f(X)]$$

واردائی یا واریانس – مثال

میانگین و واردائی متغیر تصادفی یکنواخت X با چتا

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, \forall x \in [0,1] \\ 0, \forall x \notin [0,1] \end{cases}$$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

مثال

فرض کنید $g(x) = \mathbf{1}\{x \in A\}$ به ازای $A \subseteq \Omega$ و $E[g(X)]$؟

حالت گسسته

$$E[g(X)] = \sum_{x \in X} \mathbf{1}\{x \in A\} P_X(x) = \sum_{x \in A} P_X(x) = P_X(x \in A)$$

حالت پیوسته

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}\{x \in A\} f_X(x) dx = \int_{x \in A} f_X(x) dx = P_X(x \in A)$$

چند توزیع پراستفاده

بررسی میانگین و وردائی

توزیع‌های احتمال گسسته

چگالی‌های احتمال پیوسته

توزیع یکنواخت

برامد تمام خروجی‌ها دارای احتمال برابر

$$f(x) = \frac{1}{k}, x = x_1, \ldots, x_k$$

توزیع برنولی

آزمایش دارای دو برآمد پیروزی و شکست، و احتمال متناظر p و $1-p$ (یا θ و $1-\theta$)

$X \sim$ برنولی(p)

$0 \leq p \leq 1$

شیر=1

خط=0

$$f(x;p) = p^x(۱-p)^{۱-x}, x = 0, ۱$$

توزیع برنولی

$X \sim$ برنولی(p)

$0 \leq p \leq 1$

شیر=1

خط=0

$$E[X] = p$$
$$Var[X] = p(۱ - p)$$

توزیع هندسی

x آزمایش

- با دو حالت شکست و پیروزی در هر آزمایش
- احتمال پیروزی p احتمال شکست q
  - $p + q = ۱$

احتمال پیروزی در آزمایش x-اُم (شکست $x - ۱$ مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(x;p) = (۱ - p)^{x-۱}p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱}{p}$$

احتمال پیروزی در آزمایش $x + ۱$-اُم (شکست x مرحلهٔ قبلی)

- توزیعی گسسته

$$g(x;p) = (۱ - p)^{x}p$$

- میانگین

$$\mu = \frac{۱ - p}{p}$$

توزیع دوجمله‌ای

امتحان‌های تکراری

احتمال تمام پیروزی‌ها برابر با p

هر پرتاب (آزمایش) مستقل از دیگر آزمایش‌ها

$X \sim \text{دوجمله‌ای}(x; n, p)$

$0 \leq p \leq ۱$

$$b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x (۱ - p)^{n-x}, \qquad x = 0, ۱, \ldots, n$$

مثال

بهبود ۷ نفر از ۱۰ نفر با احتمال بهبود ۰.۸

$$b(۷;۱۰,۰.۸)=\binom{۱۰}{۷}۰.۸^{۷}(۱-۰.۸)^{۳}\approx 0.۲$$

ویژگی‌ها

احتمال تجمیعی

$B(x;n,p) = \sum_{k=0}^{x} b(x;n,p)$

$b(x;n,p) = b(n-x;n,1-p)$

$\mu = np$

$\sigma^{۲} = np(1-p)$

توزیع فوق‌هندسی

نمونه‌گیری بدون جایگذاری

- وابستگی آزمایش‌ها به یکدیگر
  - فضای نمونه شامل N عضو
  - M پیروزی و $N-M$ شکست
  - انتخاب n عضو بدون جایگذاری
  - احتمال x پیروزی از n انتخاب

$$X \sim \text{فوق‌هندسی}(x; n, N, M)$$

$$h(x; n, N, M) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \qquad x = 0, ۱, ۲, ۳, \dots; x \le M; n - x \le N - M$$

ویژگی‌ها

$$p=\frac{M}{N}\Longrightarrow \mu=\frac{nM}{N}=np$$

$$p=\frac{M}{N}\Longrightarrow \sigma^{۲}=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^{۲}(N-1)}=\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^{۲}(N-1)}=\mathrm{n}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{N}\left(۱-\frac{M}{N}\right)}{N}\frac{\mathrm{N}\left(۱-\frac{n}{N}\right)}{N\left(۱-\frac{۱}{N}\right)}=np(۱-p)$$

با شرط N بزرگ و $n \ll N$

- عدم‌تفاوت بین نمونه‌گیری با جاگذاری و بدون جای‌گذاری
- امکان استفاده از تقریب احتمال فوق هندسی $h(x;n,N,M)$ با معادله توزیع دوجمله‌ای $b\left(x;n,\frac{M}{N}\right)$
- حکم برقرار است

توزیع پواسن

سختی محاسبهٔ احتمال دوجمله‌ای $b(x; n,\theta)$ با بزرگ بودن n

$X \sim$ پواسن$(x; \lambda)$

میانگین λ>0

توزیع احتمال حول عدد صحیح نامنفی که برای مدل‌سازی فراوانی یا بسامد پیشامدهای نادر استفاده دارد.

$$p(x; \lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0, ۱, ۲, \ldots$$

توزیع چندجمله‌ای

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_k; n, p_۱, p_۲, \dots, p_k) = \binom{n}{x_۱, x_۲, \dots, x_k} p_۱^{x_۱} p_۲^{x_۲} \dots p_k^{x_k}$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

$$p_۱ + p_۲ + \cdots + p_k = 1$$

توزیع فوق‌هندسی چندمتغیره

$$f(x_۱, x_۲, \dots, x_k; n, M_۱, M_۲, \dots, M_k) = \frac{\binom{M_۱}{x_۱}\binom{M_۲}{x_۲}\cdots\binom{M_k}{x_k}}{\binom{N}{n}}$$

$$x_i = 0, ۱, ۲, \dots, n$$

$$x_i \leq M_i$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$$

$$M_۱ + M_۲ + \cdots + M_k = N$$

توزیع‌های پیوسته

توزیع یکنواخت

$X \sim \text{یکنواخت}(a, b)$

$a < b$

چگالی احتمال یکسان برای هر نقطه بین a و b

$$u(x; a, b) = \begin{cases} \frac{۱}{b - a}, a < x < b \\ 0 \text{سایرجاها} \end{cases}$$

چگالی احتمال نمائی

زمان انتظار جهت وقوع پیشامد بعدی با میانگین $\frac{۱}{\lambda}$

$\theta > 0$

چگالی احتمال کاهشی روی مقادیر حقیقی نامنفی

$$e(x;\theta) = \begin{cases} \frac{۱}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0 \\ 0 \text{سایرجاها} \end{cases}$$

یا

$$e(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x > 0 \\ 0 \text{سایرجاها} \end{cases}$$

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} ۱ - e^{-\lambda x}, > 0 \\ 0 \text{سایرجاها} \end{cases}$$

چگالی احتمال نمائی

مثال‌ها

- زمان تلفن نفر بعدی
- زمان بین چاپ دو مقاله
- فاصلهٔ زمانی بین دو ارباب رجوع به اداره پست
- فاصله زمانی دو تصادفی در دوربرگردان بعد میدان کوهنورد جاده گاوازنگ
- دو زمین‌لرزه در ایران
- زمان بین دو بارندگی

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

$$Var[X] = \frac{۱}{\lambda^{۲}}$$

چگالی احتمال نمائی

مثال- به طور متوسط هر سه ساعت یکبار تصادفی در جاده گاوازنگ رخ می‌دهد. احتمال تصادفی بعدی در بازه سه و هفت ساعت چقدر است؟

$$E[X] = \frac{1}{\lambda} = ۳$$

چگالی احتمال نمائی

خاصیت بی‌حافظگی

توزیع نمایی و توزیع هندسی

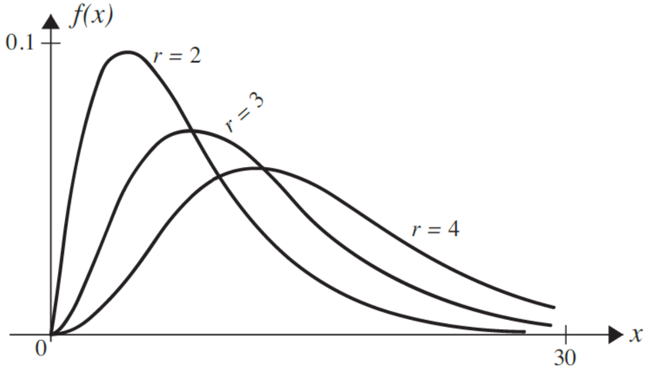
- هر دو بی‌حافظه
- اگر X مت نمایی آن‌گاه جز صحیح X دارای توزیع هندسی

چگالی احتمال گاما

زمان انتظار تا n-امین وقوع پیشامد با میانگین $۱/\lambda$

$$g(x;n,\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-۱}e^{-\lambda x}}{(n-۱)!}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

چگالی احتمال گاما



تعمیم به α

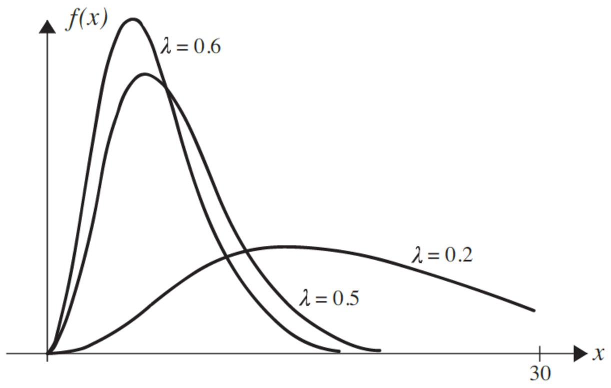
$$g(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\frac{١}{\theta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-١}e^{-\frac{x}{\theta}}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

یا

$$g(x;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-١}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_{0}^{\infty} e^{-x}x^{\alpha-١}dx$$

$$\Gamma(n)=(\mathrm{n}-١)!$$



چگالی احتمال گاما

مثال- فرض در هر ثانیه ماده رادیواکتیوی چهار ذره منتشر می‌کند. احتمال انتشار دو ذره حداقل دو ثانیه وقت لازم داشته باشد را محاسبه کنید.

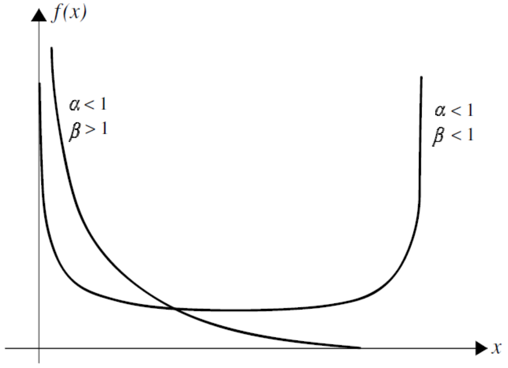
$\lambda = ۴$

$n = ۲$

x زمان تا انتشار دومین ذره. توزیع گاما $(۲,۴)$

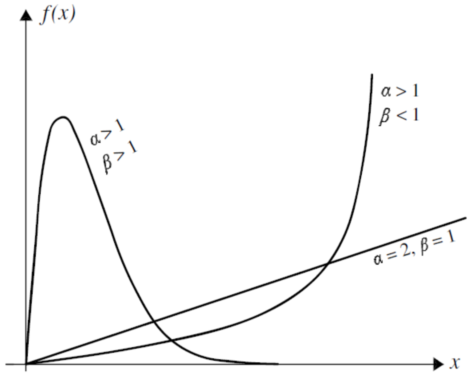
$$P(X \geq ۲) = \int_{۲}^{\infty} \frac{4e^{-4x}(4x)^{2-1}}{(2-1)!}dx = \int_{۲}^{\infty} 16e^{-4x}dx \approx= 0.003$$

چگالی احتمال بتا



$$g(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0<x<1\\ 0 \quad \text{سایرجاها}\end{cases}$$

$$\alpha,\beta>0$$



مناسب برای مت با تلاطم بین دو کران پایین و بالا

مثال

- نسبت افراد جامعه گوش دهنده به علیرضا قربانی و یا غلامحسین بنان در فاصله زمانی معین
- در صد سطح مزارع زیر کشت گندم

چگالی احتمال بتا

مثال- میله‌ای به طول l داریم. در نقطه‌ای تصادفی ضربه‌ای به آن وارد می‌شود و موجب شکستن آن در فاصلهٔ X از مبدا میله می‌شود. اگر X/l داری توزیع بتا باشد و $\alpha = \beta = 3$ احتمال $P(l/5 < X < l/4)$؟

$$P\left(\frac{l}{5} < X < \frac{l}{4}\right) = P\left(\frac{1}{5} < \frac{X}{l} < \frac{1}{4}\right) = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(3)\Gamma(3)} x^{3-1}(1-x)^{3-۱}dx$$

$$= ۳۰ \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} x^{۲}(1-x)^2 dx = 0.046$$

چگالی احتمال نرمال (گاوسی یا زنگوله‌ای)

$$n(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{۲\pi}}e^{-\frac{1}{۲}(\frac{x-\mu}{\sigma})^{۲}},-\infty<x<+\infty,\sigma>0$$

توزیع نرمال استانده

- $\mu=0,\sigma=۱$

اساس نظریهٔ آمار

توزیع ها

نوع	فرایند	ضرائب	چگالی یا جرم	تابع تجمیع	تم‌گ	میانگین	وردائی	چولگی
گسسته	برنولی	θ	$f(x;\theta)=\theta^x(1-\theta)^{1-x}, x=0,1$	$F(x;\ \theta)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-\theta, 0\le x\le 1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$	$1-\theta+\theta e^t$	θ	$\theta(1-\theta)$	$\frac{1-2\theta}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}$
	هندسی	θ	$f(x;\theta)=(1-\theta)^{x-1}\theta$	$F(x;\ \theta)=1-(1-\theta)^x$	$\frac{\theta e^t}{1-(1-\theta)e^t}$	$\frac{1}{\theta}$	$\frac{1-\theta}{\theta^2}$	$\frac{2-\theta}{\sqrt{(1-\theta)}}$
	دوجمله‌ای	n,θ	$f(x;n,\theta)=\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$	$F(x;n,\theta)=\sum_{i=0}^{x}\binom{n}{i}\theta^i(1-\theta)^{n-i}$	$(\theta e^t+1-\theta)^n$	$n\theta$	$n\theta(1-\theta)$	$\frac{1-2\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}}$
	فوق‌هندسی	n,N,M	$f(x;n,N,M)=\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$F(x;n,N,M)=\sum_{i=0}^{x}\frac{\binom{M}{i}\binom{N-M}{n-i}}{\binom{N}{n}}$		$n\frac{M}{N}$	$n\frac{M}{N}\frac{(N-M)}{N}\frac{(N-n)}{N-1}$	
	پواسن	λ	$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$	$F(x,\lambda)=e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{x}\frac{\lambda^i}{i!}$	$e^{\lambda(e^t-1)}$	λ	λ	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$
پیوسته	نمائی	λ	$f(x,\lambda)=\lambda e^{-\lambda x}$	$F(x,\lambda)=1-e^{-\lambda x}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	2
	گاما	α,λ	$f(x;\alpha,\lambda)=\begin{cases}\frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha-1}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, x\ge 0\\ 0, x<0\end{cases}$		$\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$	$\frac{\alpha}{\lambda}$	$\frac{\alpha}{\lambda^2}$	$\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$
	بتا	α,β	$f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, 0<x<1\\ \text{سایرجاها} 0\end{cases}$			$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	
	گاوس	μ,σ^2	$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}$		$e^{\frac{\sigma^2t^2}{2}+\mu t}$	μ	σ^2	0

امید ریاضی

گسسته

$$\mathbb{E}[XY] = \sum_{x} XY P_{XY}(x,y)$$

پیوسته

$$\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} XY f_{XY}(x,y)\, dxdy$$

$E[XY] = E[X]E[Y]$؟

امید ریاضی

$g: \mathbb{R}^۲ \rightarrow \mathbb{R}$

گسسته

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) P_{XY}(x,y)$$

پیوسته

$$\mathbb{E}[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y) dxdy$$

توزیع‌های توام و حاشیه‌ای – امید ریاضی و کوواریانس (هم‌وردائی)

استفاده از امید ریاضی جهت مطالعه روابط بین دو مت

$$Cov[X,Y] = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$Cov[X,Y] = 0$؟

توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای – امید ریاضی و کوواریانس

ویژگی‌ها

$$E[f(X,Y) + g(X,Y)] = E[f(X,Y)] + E[g(X,Y)]$$

$$E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

$$Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y] + ۲Cov[X,Y]$$

اگر X و Y مستقل باشند، آن‌گاه

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

$$E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)]$$

$$Cov[X,Y] = 0$$

توزیع‌های حاشیه‌ای- مثال

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	
$Y=0$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۱۲}$	$\frac{۷}{۱۲}$
$Y=1$	$\frac{۲}{۹}$	$\frac{۱}{۶}$		$\frac{۷}{۱۸}$
$Y=2$	$\frac{۱}{۳۶}$			$\frac{۱}{۳۶}$
	$\frac{۵}{۱۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۱۲}$	

X	Y
0	0
0	۱
۱	0
۱	۱
0	۲
۲	0

دو قرص به تصادف از بسته‌ای محتوای سه قرص آسپرین و ۲ قرص خواب‌آور و ۴ قرص سرماخوردگی انتخاب می‌کنیم.

X تعداد قرص آسپرین، Y تعداد قرص خواب‌آور

توزیع احتمال X و توزیع احتمال Y

$$\mu_{XY} = E(XY) = 0 \times 0 \times \frac{۱}{۶} + 0 \times ۱ \times \frac{۲}{۹} + 0 \times ۲ \times \frac{۱}{۳۶} + ۱ \times 0 \times \frac{۱}{۳} + ۱ \times ۱ \times \frac{۱}{۶} + ۲ \times 0 \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$$

$$\mu_X = E(X) = 0 \times \frac{۵}{۱۲} + ۱ \times \frac{۱}{۲} + ۲ \times \frac{۱}{۱۲} = \frac{۲}{۳}$$

$$\mu_Y = E(Y) = 0 \times \frac{۷}{۱۲} + ۱ \times \frac{۷}{۱۸} + ۲ \times \frac{۱}{۳۶} = \frac{۴}{۹}$$

$$\sigma_{XY} = \frac{۱}{۶} - \frac{۲}{۳} \times \frac{۴}{۹} = -\frac{۷}{۵۴}?$$

تابع چگالی توأم X و Y

$$f(x,y)=\frac{۱}{y}e^{-\left(y+\frac{x}{y}\right)},0<x,y<\infty$$

ب- هم‌وردائی؟

$$f_Y(y)=e^{-y}\int_0^\infty \frac{۱}{y}e^{-\frac{x}{y}}dx=e^{-y}\Longrightarrow E[Y]=\int_0^\infty ye^{-y}dy=۱$$

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dydx=\int_0^\infty e^{-y}\int_0^\infty \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^\infty ye^{-y}dy=۱$$

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)dydx=\int_0^\infty ye^{-y}\int_0^\infty \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^\infty y^{۲}e^{-y}dy=۲$$

$$Cov[X,Y]=E[XY]-E[X]E[Y]=۱$$

توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای – امید ریاضی و کوواریانس(هم‌وردائی)

ویژگی‌ها

$$Cov[aX+b, cY+d] = acCov(X,Y)$$

$$Cov[X,Y] = Cov[Y,X]$$

$$Cov[X,Y+Z] = Cov[Y,X] + Cov(X,Z) \Rightarrow Cov\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i, \sum_{j=۱}^{m} Y_j\right) = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{m} Cov(X_i, Y_j)$$

$$Cov[X,a] = 0$$

توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای – امید ریاضی و کوواریانس(هم‌وردائی)

$$Var\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i\right) = Cov\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i, \sum_{j=۱}^{n} X_j\right) = \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j=۱}^{n} Cov(X_i, X_j)$$

$$= \sum_{i=۱}^{n} Cov(X_i, X_i) + \sum_{i=۱}^{n}\sum_{j\neq i} Cov(X_i, X_j)$$

$$Var\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} Var(X_i) + ۲\sum_{i=۱}^{n}\sum_{j<i} Cov(X_i, X_j)$$

در صورت استقلال X_i-ها از یکدیگر

$$Var\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i\right) = \sum_{i=۱}^{n} Var(X_i)$$

توزیع‌های توأم و حاشیه‌ای – امید ریاضی و کوواریانس

ویژگی‌ها

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + ۲Cov[X,Y]$$

استقلال دو متغیر

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y]$$

$$Var[aX+bY] = a^۲Var[X] + b^۲Var[Y] + ۲abCov(X,Y)$$

مثال

سه متغیر تصادفی X و Y و Z

$$\mu_X = ۲, \mu_Y = -۳, \mu_Z = ۴$$

$$\sigma_X^۲ = ۱, \sigma_Y^۲ = ۵, \sigma_Z^۲ = ۲$$

$$Cov(X,Y) = -۲, Cov(X,Z) = -۱, Cov(Y,Z) = ۱$$

میانگین و وردائی $W = 3X - Y + 2Z$

$$E(W) = E(۳X - Y + ۲Z) = ۳E(X) - E(Y) + ۲E(Z) = ۳ \times ۲ - (-۳) + ۲ \times ۴ = ۱۷$$

$$Var(W) = ۹Var(X) + Var(Y) + ۴Var(Z) - ۶Cov(X,Y) + ۱۲Cov(X,Z) - ۴Cov(Y,Z)$$

$$= ۹ \times ۱ + ۵ + ۴ \times ۲ - ۶ \times (-۲) + ۱۲(-۱) - ۴ \times ۱ = ۱۸$$

توابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور $\phi(t)$ م‌ت X

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \sum_x e^{tx} p(x), & X \text{ گسسته} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, & X \text{پیوسته} \end{cases}$$

- دلیل نام
  - بدست آوردن تمامی گشتاورهای X با مشتق‌گیری متوالی از $\phi(t)$

توابع مولد گشتاور

تابع مولد گشتاور $\phi(t)$ م‌ت X

$$\phi(t) = E[e^{tX}]$$

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}E[e^{tX}] = E\left[\frac{d}{dt}(e^{tX})\right] = E[Xe^{tX}] \Longrightarrow \phi'(t) = E[Xe^{tX}]$$

$$\phi'(0) = E[X]$$

- به طریق مشابه

$$\phi''(t) = \frac{d}{dt}\phi'(t) = \frac{d}{dt}E[Xe^{tX}]) = E\left[\frac{d}{dt}Xe^{tX}\right] = E\left[X^{۲}e^{tX}\right]$$

$$\Longrightarrow \phi''(0) = E\left[X^{۲}\right]$$

به طریق اولی، قضیه

$$\phi^n(0) = E[X^n], n \geq ۱$$

توابع مولد گشتاور

قضیه

$$\phi^n(0) = E[X^n], n \geq ١$$

- نتیجه

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{E\left[X^i\right]}{i!} t^n = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Phi^{(i)}(0)}{i!} t^i$$

مثال

تمرین گشتاور توزیع برنولی با پارامتر p را بدست آورید.

توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p

$$\phi(t) = E[e^{tx}] = (1-p)e^{t\times 0} + pe^{t\times 1} = 1 - p + pe^t$$

پس

$$\phi'(t) = pe^t$$

$$\phi'(0) = E[X] = p$$

$$\phi^{(n)}(0) = E[X^n] = p$$

مثال- توزیع دوجمله‌ای

توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{n} e^{ti} \binom{n}{i} p^i (۱ - p)^{n-i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (pe^t)^i (۱ - p)^{n-i}$$

$$\phi(t) = (pe^t + ۱ - p)^n$$

پس

$$\phi'(t) = n(pe^t + ۱ - p)^{n-۱} pe^t$$

$$\phi'(0) = E[X] = np$$

مثال

توزیع دوجمله‌ای با پارامترهای n و p

$$\phi(t) = (pe^t + ۱ - p)^n$$

پس

$$\phi'(t) = n(pe^t + ۱ - p)^{n-۱} pe^t$$
$$\phi'(0) = E[X] = np$$

$$\phi''(0) = n(n-۱)(pe^t + ۱ - p)^{n-۲}(pe^t)^۲ + n(pe^t + ۱ - p)^{n-۱} pe^t$$
$$\phi''(0) = E\left[X^۲\right] = n(n-۱)p^۲ + np$$
$$Var(X) = E\left[X^۲\right] - (E[X])^۲ = n(n-۱)p^۲ + np - n^۲p^۲ = np(۱-p)$$

مثال- توزیع پواسن

توزیع پواسن با میانگین λ

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{ti}e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-۱)}$$

$$\phi(t) = e^{\lambda(e^t-۱)}$$

پس

$$\phi'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-۱)}$$

$$\phi''(t) = (\lambda e^t)^۲ e^{\lambda(e^t-۱)} + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-۱)}$$

در نتیجه

$$E[X] = \phi'(0) = \lambda$$

$$E[X^۲] = \phi''(0) = \lambda^۲ + \lambda$$

$$Var(X) = E[X^۲] - (E[X])^۲ = \lambda$$

مثال- توزیع نمایی

توزیع نمایی با پارامتر λ

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda$$

پس

$$\phi'(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)^۲}$$

$$\phi''(t) = \frac{۲\lambda}{(\lambda - t)^۳}$$

در نتیجه

$$E[X] = \phi'(0) = \frac{۱}{\lambda}$$

$$E[X^۲] = \phi''(0) = \frac{۲}{\lambda^۲}$$

$$Var(X) = E[X^۲] - (E[X])^۲ = \frac{۱}{\lambda^۲}$$

مثال- توزیع نرمال

توزیع نرمال با پارامترهای μ و $\sigma^{۲}$

$$\phi(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{\sigma^{۲} t^{۲}}{۲} + \mu t}$$

پس

$$\phi'(t) = (\mu + t\sigma^{۲}) e^{\frac{\sigma^{۲} t^{۲}}{۲} + \mu t}$$

$$\phi''(t) = (\mu + t\sigma^{۲})^{۲} e^{\frac{\sigma^{۲} t^{۲}}{۲} + \mu t} + \sigma^{۲} e^{\frac{\sigma^{۲} t^{۲}}{۲} + \mu t}$$

در نتیجه

$$E[X] = \phi'(0) = \mu$$

$$E[X^{۲}] = \phi''(0) = \mu^{۲} + \sigma^{۲}$$

$$Var(X) = E[X^{۲}] - (E[X])^{۲} = \sigma^{۲}$$

ویژگی‌ها

$$\phi_X(t) = E[e^{tX}] = E(\cos tX) + iE(\sin tX)$$

قضیه

$$\phi_{X_۱+X_۲}(t) = \phi_{X_۱}(t)\phi_{X_۲}(t)$$

- تعمیم قضیهٔ اخیر؟

$$\phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(t)$$

قضیه

$$\forall t: \phi_{X_۱}(t) = \phi_{X_۲}(t) \Longrightarrow \forall x: F_{X_۱}(x) = F_{X_۲}(x)$$

عکس قضیه چطور؟

نامساوی مارکوف

اگر X متغیر تصادفی باشد که صرفا مقادیر نامنفی را می‌پذیرد، آن‌گاه به ازای هر a>0

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

اثبات

$$E[X] = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^a xf(x)dx + \int_a^\infty xf(x)dx \geq \int_a^\infty xf(x)dx \geq \int_a^\infty af(x)dx$$

$$= a\int_a^\infty f(x)dx = aP\{X \geq a\}$$

چبیشف کبیر!

اگر μ میانگین و σ انحراف معیار متغیر تصادفی X باشند، آن‌گاه برای هر مقدار مثبت k داریم

$$P(|x-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^{۲}}$$

اثبات

$$\sigma^{۲} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} k^{۲}\sigma^{۲} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} k^{۲}\sigma^{۲} f(x)dx$$

با شرط $\sigma^{۲} \neq 0$

$$\frac{۱}{k^{۲}} \geq \int_{-\infty}^{\mu-k\sigma} f(x)dx + \int_{\mu+k\sigma}^{+\infty} f(x)dx$$

پس

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{۱}{k^{۲}}$$

و یا

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq ۱ - \frac{۱}{k^{۲}}$$

چبیشف

$$P(|X-\mu| < k\sigma) \geq ۱ - \frac{۱}{k^۲}$$

من باب مثال

- احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۲σ میانگین حداقل $\frac{۳}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۲^۲}$
- احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۳σ میانگین حداقل $\frac{۸}{۹} = ۱ - \frac{۱}{۳^۲}$
- احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۵σ میانگین حداقل $\frac{۲۴}{۲۵} = ۱ - \frac{۱}{۵^۲}$

σ کنترل‌کنندهٔ پراکندگی توزیع متغیر تصادفی

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}, & 0 < x < ۱ \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۲σ از میانگین و مقایسه با کران پائینی حاصل از قضیهٔ چبیشف

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}, & 0 < x < ۱ \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۲σ از میانگین و مقایسه با کران پائینی حاصل از قضیهٔ چبیشف

$$\mu = \frac{۱}{۲} \text{ میانگین و} \quad \sigma^{۲} = \frac{۱}{۴۴} \Longrightarrow \text{انحراف } \sigma = \sqrt{\frac{۱}{۴۴}} = ۰.۱۵$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}, & 0 < x < ۱ \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۲σ از میانگین و مقایسه با کران پائینی حاصل از قضیهٔ چبیشف

$$\mu = \frac{۱}{۲} \text{ میانگین و} \frac{۱}{۴۴} = \sigma^{۲} \Longleftarrow \text{انحراف } ۰.۱۵ = \sqrt{\frac{۱}{۴۴}} = \sigma$$

احتمال بودن در فاصلهٔ مدنظر در بازهٔ ۰.۲ و ۰.۸

$$P(.۲ < X < 0.۸) = \int_{۰.۲}^{۰.۸} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}dx = ۰.۹۶$$

مثال

$$f(x) = \begin{cases} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}, & 0 < x < ۱ \\ 0 & \text{سایرجاها} \end{cases}$$

احتمال قرار گرفتن X در فاصلهٔ ۲σ از میانگین و مقایسه با کران پائینی حاصل از قضیهٔ چبیشف

$\mu = \frac{۱}{۲}$ میانگین و $\sigma^{۲} = \frac{۱}{۴۴} \Longrightarrow$ انحراف $\sigma = \sqrt{\frac{۱}{۴۴}} = ۰.۱۵$

احتمال بودن در فاصلهٔ مدنظر در بازهٔ ۰.۲ و ۰.۸

$$P(.۲ < X < 0.۸) = \int_{۰.۲}^{۰.۸} ۶۳۰x^{۴}(۱-x)^{۴}dx = ۰.۹۶$$

نتیجه حاصل از قضیهٔ چبیشف ۰.۷۵

میانگین نمونه

اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ توزیع مستقل و یکسان داشته باشند

- ، آن‌گاه متغیر $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ میانگین نمونه

میانگین نمونه

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ توزیع مستقل و یکسان داشته باشند

- آن‌گاه متغیر $\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$ میانگین نمونه ،

قضیه

اگر $X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ توزیع مستقل و یکسان با میانگین μ و وردائی $\sigma^۲$ باشند، آن‌گاه

- $\mathrm{E}[\bar{X}] = \mu$
- $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \sigma^۲/n$
- $\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = 0$

اثبات

میانگین نمونه

اثبات-

$$\mathrm{E}[\bar{X}] = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} E[X_i] = \mu$$

$$\mathrm{Var}[\bar{X}] = \left(\frac{۱}{n}\right)^{۲} Var\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i\right) = \left(\frac{۱}{n}\right)^{۲} \sum_{i=۱}^{n} Var(X_i) = \frac{\sigma^{۲}}{n}$$

$$\mathrm{Cov}(\bar{X}, X_i - \bar{X}) = \mathrm{Cov}(\bar{X}, X_i) - \mathrm{Cov}(\bar{X}, \bar{X}) = \frac{۱}{\mathrm{n}}\mathrm{Cov}\left(X_i + \sum_{j\neq i}^{n} X_j\,, X_i\right) - \mathrm{Var}[\bar{X}]$$

$$= \frac{۱}{\mathrm{n}}\mathrm{Cov}(X_i, X_i) + \frac{۱}{\mathrm{n}}\mathrm{Cov}\left(\sum_{j\neq i}^{n} X_j\,, X_i\right) - \mathrm{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^{۲}}{n} - \frac{\sigma^{۲}}{n} = 0$$

توزیع نرمال استانده

میانگین صفر و انحراف معیار ۱

نمایش با Z

Table III: Standard Normal Distribution

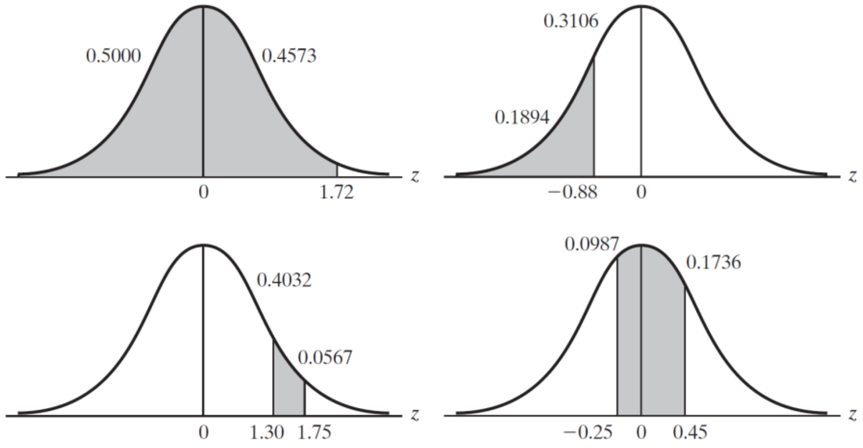
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4988
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Also, for $z = 4.0, 5.0,$ and 6.0, the probabilities are 0.49997, 0.4999997, and 0.499999999.

Table III: Standard Normal Distribution

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4988
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990

Also, for $z = 4.0$, 5.0, and 6.0, the probabilities are 0.49997, 0.4999997, and 0.499999999.



مثال- متغیر تصادفی با توزیع نرمال استانده

احتمال مقدار کمتر از ۱.۷۲

- یافتن مقدار متناظر در جدول و افزودن ۰.۵۰۰۰ به آن
- ۰.۵۰۰۰ + ۰.۴۵۷۳ = ۰.۹۵۷۳

احتمال مقدار کمتر از ۰.۸۸−

- یافتن مقدار متناظر در جدول و تفاضل آن از ۰.۵۰۰۰
- ۰.۵۰۰۰ − ۰.۳۱۰۶ = ۰.۱۸۹۴

احتمال مقدار بین ۱.۳۰ و ۱.۷۵

- تفاضل بزرگتر از کوچکتر
- ۰.۴۵۹۹ − ۰.۴۰۳۲ = ۰.۰۵۶۷

احتمال مقدار بین ۰.۲۵− و ۰.۴۵

- جمع
- ۰.۰۹۸۷ + ۰.۱۷۳۶ = ۰.۲۷۲۳

قانون قوی اعداد بزرگ

اگر توزیع $X_۱, X_۲, \ldots$ مستقل و یکسان داشته باشند و $\mathrm{E}[X_i] = \mu$ با احتمال ۱، آن‌گاه متغیر $\bar{X} = \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i}{n}$ میانگین نمونه خوانده می‌شود.

$$\frac{X_۱ + X_۲ + \cdots X_n}{n} \to \mu \text{ با } n \to \infty$$

قضیهٔ حد مرکزی (یا قضیهٔ مرکزی حد)

قضیه

اگر $X_۱,X_۲,\ldots,X_n$ دنبالهٔ مستقلی از متغیرهای تصادفی مستقل و یکسان با میانگین μ و وردائی $\sigma^۲$ باشند، آن‌گاه

$$\frac{X_۱+X_۲+\cdots X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

با $n\to\infty$ به توزیع نرمال استانده میل می‌کند. به دیگر سخن

$$P\left\{\frac{X_۱+X_۲+\cdots X_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leq a\right\}\to\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{a}e^{-\frac{x^۲}{۲}}dx \quad \text{با}\ n\to\infty$$

یا با نمایش دیگر $\bar{X}=\frac{\sum_{i=۱}^{n}X_i}{n}$ و $n\to\infty$، $Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ توزیع نرمال استاندارد است.

قضیه دوموآور-۱۷۱۸

Xمتغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و $\frac{۱}{۲}$ باشد، آن‌گاه به ازای هردو عدد a و b و $a<b$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X - \frac{۱}{۲}n}{\frac{۱}{۲}\sqrt{n}} < b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$E[X] = \frac{۱}{۲}n$$

$$\sigma_X = \frac{۱}{۲}\sqrt{n}$$

قضیه دوموآور-لاپلاس-۱۸۱۲

Xمتغیر تصادفی دوجمله‌ای با پارامترهای n و p باشدبرای هردو عدد a و b و $a<b$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a < \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} < b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$E[X] = np$$

$$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$$

تقریبی مناسب برای هر n و p به شرط ۱۰ $np(1-p) \geq$

مثال

متغیر تصادفی با میانگین ۲۰۰ و انحراف معیار ۱۵

احتمال حداقل میانگین ۲۰۴ برای نمونه تصادفی به اندازه ۳۶ مورد

بنابر چند قضیه قبل

- میانگین توزیع $\bar{X}$ برابر ۲۰۰ $= \mu_{\bar{X}}$
- انحراف معیار آن برابر با ۲.۵ $= \sigma_{\bar{X}} = \frac{۱۵}{\sqrt{۳۶}}$
- بر اساس قضیه مرکزی حد توزیع تقریبا نرمال ۱.۶ $= Z = \frac{۲۰۴-۲۰۰}{۲.۵}$

$$P(\bar{X} \geq ۲۰۴) = P(Z \geq ۱.۶) = ۰.۵۰۰۰ - ۰.۴۴۵۲ = ۰.۰۵۴۸$$

محاسبهٔ امید با شرطی بودن

$$E[X] = E\big[E[X|Y]\big]$$

گسسته

$$E[X] = \sum_{y} \big[E[X|Y = y]\big] P\{Y = y\}$$

پیوسته

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[E[X|Y = y]\big] f_Y(y)$$

محاسبهٔ امید با شرطی بودن- اثبات حالت گسسته

$$E\big[E[X|Y]\big] = \sum_y \big[E[X|Y=y]\big] P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x xP\{X=x|Y=y\}\, P\{Y=y\}$$

$$= \sum_y \sum_x xP\{X=x, Y=y\}$$

$$= \sum_x x \sum_y P\{X=x, Y=y\}$$

$$= \sum_x xP\{X=x\}$$

$$= E[X]$$

محاسبهٔ وردائی با شرطی بودن

$$Var[X] = E\big[Var[X|Y]\big] + Var[E[X|Y]]$$

سوژه در علم: روش بیزی

دانشمندان اعتقادات شخصی، بینش، شهود خود را در روش‌شناسی پژوهش علمی وارد می‌کنند.

- سوژه (ذهن)
- مراجعه به فصل‌های سوم و چهارم [Press01]

سوژه شامل

- ایده‌های آموزش‌دیده‌شده، شهود، اعتقادات محکم، فهم عملی از اصول زیربنایی
- مبنی بر مشاهدات قبلی آن‌ها یا دیگران

نتیجهٔ علمی حاصل ترکیبی از

- اعتقادات و درکی که پیش از انجام آزمایش
- جمع‌آوری داده
- تحلیل عینی (ابژه) دادهٔ آزمایشی

سوژه در علم: روش بیزی

قبلا ناآگاهانه

از حدود ۱۳۳۰ شمسی به بعد

- استفاده از روش‌های صوری
  - تحلیل آماری بیزی

سوژه:

- اعتقادات، اطلاع، دانش دانشمند(دانشگر، دانشور) قبل از گرفتن دادۀ جدید
- چه دانشمند چه شخصی عادی
- استفاده در تمامی تصمیمات روزانه، سیاست پیشبرد فیاوری و صنعت و حکومت

ملکف ۱۹۹۹

- تعداد مقالات مربوط به رهیافت بیزی حدود ۱۴۰۰ عنوان در سال ۱۹۹۹
- انفجار نشر بیزی!
- در بسیاری از زمینه‌های چون اخترفیزیک، ژن‌شناسی، آزمایش داروی جدید.

منشأ احتمال و استنباط آماری در علم

از زمان تجارت سوداگرائی

- محاسبهٔ هزینه مناسب بیمه جهت پوشش ریسک‌ها و خطرات اقتصادی در فیاوری و کسب‌وکار
- آغاز صنعت بیمه

خُنُک آن قماربازی که بباخت هر چه بودش و نبود هیچش الّا هوس قمار دیگر

- استفادهٔ قماربازان از ریاضیات جهت پاسخ به پرسش‌هائی دربارهٔ شانس رخداد پیشامد تصادفی در قرن هفدهم
  - پیشامدهایی چون جفت شش آمدن
  - کار ریاضی‌دانان بر احتمالات
  - محاسبهٔ احتمالات ریاضی با شمارش تعداد برآمدهای ممکن تاس
  - صرفا یک حالت ممکن، ۱/۳۶
    - اما زمانی که تمامی احتمالات برابر
  - اما، صرفا مفید هنگام یکی بودن تمامی برآمدها و متناهی بودن برآمدهای ممکن
  - در صورت یکی نبودن محتمل بودن برامدها
    - محتمل‌تر بودن مدار خراب نسبت به مدارها سالم در تولیدی مدارهای کامپیوتر

منشأ احتمال و استنباط آماری در علم

فرض یکی یا دو تاس سالم نیست.

- آن‌گاه شمارش تنها کافی نیست
- فرض اطلاع از اینکه یکی از تاس‌ها شش محتمل‌تر
- پس جفت شش بیشتر از ۱/۳۶
- راه‌حل؟
  - پرتاب مکرر تاس و شمارش تعداد دفعت جفت شش

مشهور به تعریف «بسامد نسبتا بلندمدت» احتمال

- مبنی بر ساخت احتمال ریاضی بر تجربه‌ای مشاهده‌پذیر
- اتحاد با علم تجربی

منشأ احتمال و استنباط آماری در علم

تعریف «بسامد نسبتا بلندمدت» احتمال

- صرفا اعمال‌پذیر بر مواردی که نسبتا زیاد تکرار شوند.

اما وجود موقعیت‌هائی

- منفرد
- مواردی که زیاد تکرار نمی‌شوند
  - مثال- نظریه‌ای علمی که آینده مشاهدات را بهتر پیش‌بینی کند
  - احتمال بارش باران در ساعت آینده
  - احتمال برنده شدن نامزد مورد حمایت ما در انتخابات بعدی

نیاز به تعریف احتمال که موارد فوق را پوشش دهد و تعریف قبلی را نیز به عنوان حالت خاص شامل شود

منشأ احتمال و استنباط آماری در علم

در نتیجه

- احتمال به مثابهٔ «درجه اعتقاد فردی شخص» درباره گزاره
  - یا «احتمال شخصی»
- مشهور به «احتمال ذهنی» «احتمال سوژه»
- «ذهن» به معنای تعریف احتمال بر اساس اعتقاد متعلق به فرد
  - امکان تعریف دو مورد خاص (شمارشی و بسامدی) مبنی بر اعتقاد
  - مثال- «شاه چهارم شاهنامه هوشنگ بود.»
    - غلط یا درست
    - درجه اعتقاد صحت آن
    - پنجاه‌پنجاه
  - قد شخص بعدی
  - نظریهٔ علمی
- استنتاج آماری
  - جمع‌اوری مشاهدات از پدیده‌ها
  - تلاش جهت استنباط یا قیاس اصولی از مشاهدات
  - استفاده از آن جهت پیش‌بینی برآمدهای آزمایش‌های آینده مربوط به پدیدهٔ مذکور

استنتاج آمار بیزی- پیشین و پسین

۱۷۶۳

- توماس بیز
- اعتقاد پیشین و اعتقاد پسین
  - استنتاج بیزی
- هر استنتاج علمی صوری شامل دو بخش
  - اطلاع و فهم ذهنی پیش از آزمایش
  - مشاهدهٔ علمی و آزمایش
- جیمز برنولی، پیر لاپلاس، فینِتّی
  - استفاده از زمان بیز تا ۱۲۰ سال پیش
- فیشر و دیگران
  - معرفی روش بسامدی در استنتاج آماری
  - دارای مشکلات فنی و ناسازگاری
- امروزه جدا شدن بیزی‌ها از بسامدی‌ها
  - تغییر پارادیم کوهنی

استنتاج آمار بیزی- پیشین و پسین

سکه سالم: احتمال شیر آمدن ۰,۵

پیشین

- اعتقاد و ظن ما پیش از به میان آمدن مجموعه‌ای از مشاهدات

پس از مشاهدهٔ اعتقاد ما تغییر می‌کند

- پسین
- به دلیل به حساب آوردن پاره‌ای مشاهدات

استنتاج بیز

- سوق دهنده از پیشین به پسین

استنتاج آمار بیزی- پیشین و پسین

اعتقاد شخص دربارهٔ موجودیتی ناشناس با استفاده از نتایج بیزی

- با مشاهدهٔ مواردی حاصل دو نوع اطلاع
  - نوعی مبنی بر مشاهدهٔ داده- ابژه و عینی
    - نمایش در «تابع درست‌نمائی»
      - تلخیص داده از آزمایش در قالب احتمال
- علم صرفا ابژه و عینی نیست
  - ترکیبی از عین و ذهن
  - به همراه روشی بازخوردی از یکی به دیگری
- هنگامی که داده نشانگر تغییر فرضیه
  - تببین فرضیهٔ جدید
  - طراحی آزمایش جدید
  - جمع‌آوری و انتخاب دادهٔ جدید
  - اعتقاد پسین در آزمایش قبلی مبدل به اعتقاد پیشین در آزمایش جدید
    - بدلیل بهترین دانسته بودن دانشور تاکنون
    - جهت مطالعه و بررسی آینده،نیاز به یادگیری از گذشته
      - بخشی از یادگیری ذهنی و سوژه‌ای
      - تغییر آن با دیدن داده‌ها و مشاهدات جدید از پدیده

صورت روش بیز

$$p(\beta|\alpha) = \frac{p(\beta)p(\alpha|\beta)}{p(\beta)p(\alpha|\beta) + p(\beta')p(\alpha|\beta')}$$

تعمیم

پیشامدهای β_1، β_2، ...، β_k افرازی از فضای نمونهٔ Ω و $p(\beta_i) \neq 0$

$$p(\beta_i|\alpha) = \frac{p(\beta_i)p(\alpha|\beta_i)}{\sum_{j=1}^{k} p(\beta_j)p(\alpha|\beta_j)}$$

مثال

مراجعه به طبیب جهت چک‌آپ منظم پزشکی

پیشنهاد پزشک به انجام ازمایش جهت تعیین وجود بیماری مهلک

فرض (غیرواقع) امکان صرفا یک آزمایش

فرض

- پزشک دلیلی بر بیماری شما ندارد
- تاریخ بیماری ندارید، بیماری زمینه ندارید، پزشک نشانهٔ و علائم بیماری مشاهده نکرده است.
- صرفا معتقد به آزمایش جهت روال بررسی پزشکی

مثال- ادامه

فرض آزمایش بسیار حساس

- جواب مثبت در حالی که مراجعه‌کننده بیماری را ندارد
  - مثبت کاذب ۳٪
- جواب منفی در حالی که مراجعه‌کننده بیماری را دارد
  - منفی کاذب ۱٪
  - مهم‌تر. چرا؟
- میزان خطای آزمایش نمایشگر میانگین آنچه که رخ می‌دهد
- فرض رخداد بیماری در جمعیت یک در یک میلیون $P(\beta)$
- فرض- نتیجه مثبت!
- چقدر معتقد به درستی وجود بیماری هستید؟
- احتمال پسین چقدر است؟

- ۹۷٪ احتمال بیماری
  - طبیب ناآشنا با احتمال
- در واقع ۰,۰۰۳٪

$$P(\beta|+test) = \frac{P(+test|\beta)P(\beta)}{P(+test|\beta)P(\beta) + P(+test|\neg\beta)P(\neg\beta)}$$

$$P(+test|\neg\beta) = ۰.۰۳$$
$$P(-test|\beta) = ۰.۰۱$$
$$P(+test|\beta) =? = ۱ - P(-test|\beta) = ۱ - ۰.۰۱ = ۰.۹۹$$
$$P(\beta) = ۱۰^{-۶}$$

$$P(\beta|+test) = \frac{۰.۹۹ \times ۱۰^{-۶}}{۰.۹۹ \times ۱۰^{-۶} + ۰.۰۳ \times (۱ - ۱۰^{-۶})} = ۰.۰۰۰۰۳$$

مثال – ادامه

فرض دیگر

- بی‌اطلاعی از سابقهٔ بیماری
- سابقهٔ بیماری در خاندان شما

سه تن پدربزرگ و مادربزرگ‌های شما از چهار تن به دلیل این بیماری فوت کرده‌اند

پدر نیز هنگام مرگ به درستی تشخیص داده نشد

- استفاده از احتمال یک در میلیون اینجا معنا ندارد
- احتمال وقوع در زیرنوع شما مقدار بالا نیست بلکه ۱ در ۱۰۰۰ است.

احتمال بیماری با مثبت بودن آزمایش؟

- ۹۷٪؟
- ۳,۲٪

۱ در ۳۴

- ۵۰٪

$$P(\beta|+test) = \frac{P(+test|\beta)P(\beta)}{P(+test|\beta)P(\beta) + P(+test|\neg\beta)P(\neg\beta)}$$

$$P(+test|\neg\beta) = ۰.۰۳$$

$$P(-test|\beta) = ۰.۰۱$$

$$P(+test|\beta) = ? = ۱ - P(-test|\beta) = ۱ - ۰.۰۱ = ۰.۹۹$$

$$P(\beta) = ۱۰^{-۳}$$

$$P(\beta|+test) = \frac{۰.۹۹ \times ۱۰^{-۳}}{۰.۹۹ \times ۱۰^{-۳} + ۰.۰۳ \times (۱ - ۱۰^{-۳})} = ۰.۰۳۲$$

ارزش عقیدهٔ دوم

به دلیل مهلک بودن بیماری، به دنبال بررسی دومی درباره راستی‌آزمایی وجود بیماری پزشک دیگر

- نوع دیگر و مستقلی از آزمایش یا تفسیر و خوانش دیگری از آزمایش یکسان با قبلی
  - اغلب خوانش چندبارهٔ یک آزمایش غالب‌تر بر آزمایش‌های دیگر. چرا؟
- نتیجه یا مثبت (تائید) یا منفی

فرض نتیجه مثبت!

فرض مثبت غلط و منفی غلط یکسان با قبل

- ابتدا نتیجه ۰٫۰۰۳٪
- سپس با اطلاع از بیماری خانوادگی ۳٫۲٪
- آخرین احتمال به عنوان احتمال پیشین
  - نتیجه ۵۲٫۲٪

$$P(\beta|+test) = \frac{P(+test|\beta)P(\beta)}{P(+test|\beta)P(\beta) + P(+test|\neg\beta)P(\neg\beta)}$$

$$P(+test|\neg\beta) = ۰.۰۳$$
$$P(-test|\beta) = ۰.۰۱$$
$$P(+test|\beta) = ? = ۱ - P(-test|\beta) = ۱ - ۰.۰۱ = ۰.۹۹$$
$$P(\beta) = ۰.۰۳۲$$

$$P(\beta|+test) = \frac{۰.۹۹ \times ۰.۰۳۲}{۰.۹۹ \times ۰.۰۳۲ + ۰.۰۳ \times (۱ - ۰.۰۳۲)} = ۰.۵۲۲$$

استفاده از احتمال جهت مقایسهٔ نظریه‌های علمی

پوپر، لاکتوش، فیشر، نیمان، و پیرسن

- معرفی استاندهٔ شایستگی مبنی بر ابژگی (عینی) و قانع‌کنندگی و نه احتمالاتی

نظریهٔ آنها بنیان تخمین و آزمایش پیچیدگی

- شکل‌دهندهٔ بخش اصلی روش‌های اصلی استنتاج آماری
- پایهٔ درستی تحلیل و آزمایش‌ها

اما

- از نظر بسیاری ناموفق
  - برجستگی نامستحق!
  - ابژگی کامل دست‌نیافتنی
  - نگهبانان ایده‌آل، متعدیان از آن
  - هیچ‌کدام از این روش‌ها بدون قضاوت شخصی و فرضیات دلخواهانه اعمال‌پذیر نیستند.

(هاوسن و اورباخ)

استفاده از احتمال جهت مقایسهٔ نظریه‌های علمی

فیلسوفان و دانشوران و آماریان

- تحلیل آماری مبنی بر روش‌های غیرمبتنی بر احتمال
- عینی (ابژه‌ای ابژوی)
- رهیافت کلاسیک یا بسامدی
  - علی رغم بسیاری شکست‌ها و ناسازگاری‌ها، قبول آسان آن در محافل علمی
  - تخمین کمیت‌ها علمی غیرقطعی
- مبتنی بر روش پوپری
  - ابطال‌پذیری
  - برپایی فرضیهٔ پوشالی که معتقدند غلط است و نشان دادن غلط بودن آن
    - جهت مقایسه نظریه‌های علمی
  - اقتباس نیمان و پیرسن از آن در علم آماری و «آزمایش فرضیه»

منابع تهیه این درس

[پینسکی]

[راس]

ج. فروند و همکاران، «آمار ریاضی و کاربردهای آن»، م. ق. وحیدی‌اصل، ع. عمیدی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ دوم، ۱۳۹۲- فصل‌های ۲ و ۳ و بخشی از فصل ۴

[پرس] S. J. Press, J. M. Tanur, “The Subjectivity of Scientists and the Bayesian Approach”, Wiley, 2001

CS 228 - Probabilistic Graphical Models, 2018-19, Stanford University, https://cs228.stanford.edu